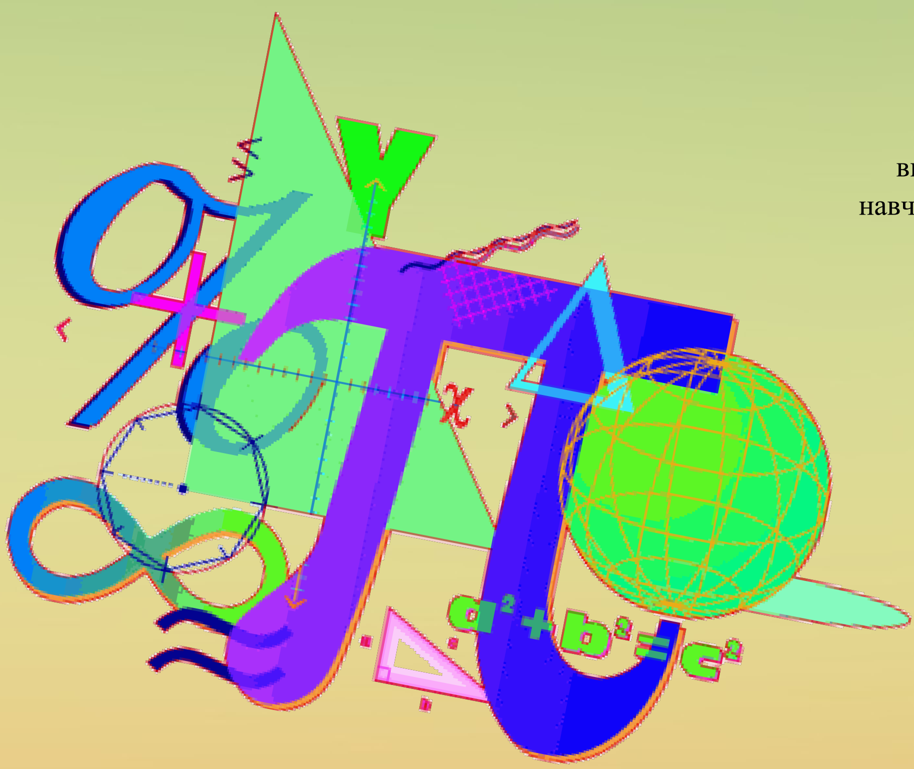
ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ ХМЕЛЬНИЦЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ

РОЗГЛЯНУТО
Науково-методичною радою
науково-методичного центру
управління освіти
Хмельницької міської ради
Протокол №___ від __________
Завідувач НМЦ______Думанська Г.В.

СХВАЛЕНО
Вченою радою
Хмельницького обласного
інституту післядипломної
педагогічної освіти
Протокол №___від_________р.
РекторХОІППО________В.Берека

Обчислення границь функцій.

Методичний посібник



Никитюк Наталія Василівна
вчитель математики
вищої категорії, старший вчитель
навчально-виховного комплексу №2

м. Хмельницький 2016

Схвалено до друку рішенням науково-методичної ради
інформаційно-методичного кабінету управління освіти Хмельницької міської ради
(протокол №   від   р.)

Методичний посібник

Обчислення границь функцій.

Автор:
Никитюк Н.В. .,вчитель математики, вчитель вищої категорії, старший вчитель
НВК № 2 м. Хмельницького

У збірнику подаються теоретичні відомості про послідовності, їх границі, нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх властивості, теореми про границі, чудові границі та алгоритм обчислення границі та дидактичний матеріал.

Рекомендовано для вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів

Рецензенти:
Кушнір С.О., вчитель математики, спеціаліст вищої категорії, учитель-методист
Петровська М.І. спеціаліст вищої категорії, учитель-методист.

Никитюк Н.В
“ Обчислення границь функцій. ”
Методичний посібник –Хмельницький, 2016- 00с.

Зміст

Вступ.

На сучасному етапі розвитку суспільства математика , як одна з наукових дисциплін, відіграє велику роль . Відомості з математики, які отримують учні з шкільного курсу математики, необхідні для будь якої суспільно-корисної діяльності.

Даний методичний посібник містить теоретичні відомості про послідовності, їх границі, нескінченно малі та нескінченно великі функції, їх властивості, теореми про границі, чудові границі та алгоритм обчислення границі.

Поряд з теоретичними відомостями методичний посібник містить широкий вибір практичних завдань, які систематизовано по типу невизначеності, що сприятиме кращому засвоєнню теми «Обчислення границь».

Мета даного посібника полягає у забезпеченні засвоєння теоретичних знань та практичних навичок.

Запропонований посібник може бути використаний на уроках математики в загальноосвітніх класах та класах з поглибленим вивченням математики.

1.Послідовність, границя послідовності.

<u>Визначення</u> : Якщо кожному nєN поставлено у відповідність число x_n, то множина $\{x\}=\{x_1,x_2,x_3\ldots\}$ називається числовою послідовністю, або просто постідовністю.

Число $x_1,x_2\ldots$ називається членами послідовності

x_n –загальний член

Послідовність вважається заданою, якщо відомий закон формування загального члена x_n

<u>Визначення:</u> Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою, якщо існують такі точки M, що для кожного x_n, маємо $m \le x_n \le M$

Число a називається границею послідовності, $\{x_n\}$, якщо для будь – якого додатного E> 0 існує такий номер N, що при n>N виконується нерівність

$|x_4-a|<E$

Якщо границя існує, то послідовність збігається і пишуть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

$x_n = a$, або x_n>a, коли n->∞

Якщо границя не існує – послідовність розбігається.

З послідовностями виконуються такі дії:

- Множення послідовності на число;
- Алгебраїчна сума послідовностей є послідовність;
- Добуток послідовностей є послідовність;
- Частка послідовностей є послідовність

<u>Теорема (Вейєрштраса):</u>

Обмежена монотонна послідовність збігається, тобто має границю

2.Границя функції, нескінченно малі і нескінченно великі функції, їх властивості.

<u>Визначення</u>: Число a називається границею функції y=f(x), коли x->x_0, якщо для будь – якого E> 0 існує S> 0, що для всіх xєX, які задовольняють нерівність |x-x_0| <S, виконується нерівність |f(x) –a|<E.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Для того, щоб функція y=f(x) мала границю, коли x ->x_0 необхідно і достатньо, щоб існували права і ліва границі і вони були б рівні між собою.

<u>Визначення.</u> Функція α(x) називається нескінченно малою коли x->x_0, якщо $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

Скінченна сума нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.

<u>Визначення.</u> Функції y=f(x) називається обмеженою на множині x, якщо ∃M, що |f(x)|<M для Аx є X.

Теорема. Добуток нескінченно малої функції, коли x->x_0, на обмежену функцію є функція нескінченно мала

<u>Визначення</u>. Послідовність $\{x_n\}$ nєN нескінченно великою $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

Теорема. Якщо функція α(x) – нескінченно велика,то φ(x)=$\frac{1}{\alpha(x)}$ - нескінченно мала.

3. Основні теормеми про границі

Теорема 1. Якщо функція має границю в даній точці, то ця границя єдина

Теорема 2. Границя сталої величини дорівнює цій величині.

$$\lim_{x\to x_0} C = C,\ \text{C= const}$$

Теорема 3. Якщо існують границі функції f(x) і q(x) в т. x_0, то існують в цій точці границі їх суми f(x)+q(x), добутки f(x)*q(x) і, якщо $\lim_{x\to x_0} q(x) \neq 0$, то і границя частки f(x)/q(x)і мають місце рівності:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+q(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} q(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)*q(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) * \lim_{x\to x_0} q(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} q(x)}, \text{ при } \lim_{x\to x_0} q(x) \neq 0$$

Теорема 4. Сталий множник можна винести за знак границі, тобто

$\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, c=const

4.Чудові границі.

При обчисленні границь функцій використовують наступні границі названі чудовими.

Перша чудова границя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Друга чудова границя $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\frac{1}{x})^{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

e≈2,71828…- основа натуральних логорифмів.

Першу чудову границю використовують при обчисленні границь тригонометричних функцій, використавши співвідношення:

$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Обчислити:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x+5x}{5x} = 5\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{5x} = 5$

Другу чудову границю використовують при обчисленні границь виду:

$\lim\limits_{x\to 0}[u(x)]^{v(x)}$, де $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 1.\ \lim\limits_{x\to 0} v(x) = \infty$

X_0- число, або один із символом +∞,-∞.

Обчислити:

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{x}$, при a=const. Використаємо другу чудову границю

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=\lim_{x\to\infty}[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}]^a=\{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}}\}^a=$ea

5. Алгоритм обчислення границь

1.Підставити граничне значення аргументу в досліджуваний вираз. Якщо при цьому отримаємо кінцеве значення, то воно є границею даної функції.

Приклад:

Знайти: $\lim_{x\to 2}(x^2-4x+3)=2^2-4*2+3=4-8+3=-1$

2.Визначити тип невизначеності:

$[\frac{\infty}{\infty}]$,$[\frac{0}{0}]$,$[0*\infty]$,$[1^{\infty}]$,$[0^{\infty}]$,$[0^0]$та інше…

- $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ - від нескінченно великих функції перейти до нескінченно малих (винесемо за дужки степінь з найбільшим показником в чисельнику і знаменнику)

а) $\lim_{n\to\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2-4x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(6-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}=$

$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{5}{6}$; оскільки $\frac{6}{x},\frac{1}{x^2},\frac{4}{x},\frac{2}{x^2}$ - неск. малі і їх границі

дорівнюють нулеві. 5 і 6 – сталі величини

- $\left[\frac{0}{0}\right]$ – чисельник і знаменник многочлени . Розкласти на множники чисельник і знаменник, спростити, обчислити границю спрощеного виразу.

$\lim_{n\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to 4}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{n\to 4}\frac{x-1}{x-2}=\frac{\lim_{n\to 4}(x-1)}{\lim_{n\to 4}(x-2)}=\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}$

- $\left[\frac{0}{0}\right]$ - в чисельнику або знаменнику , чи і в чисельнику і в знаменнику квадратні корені (домножаємо на спряжений вираз)

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$ Домножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{6}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$ Домножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника і до знаменника.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

в) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to \pi}\frac{2\sin^2\frac{\pi-x}{4}}{(\pi-x)\,(\pi+x)} = \lim\frac{2\sin\frac{\pi-x}{4}\sin\frac{\pi-x}{4}}{4\left(\frac{\pi-x}{4}\right)(\pi+x)} = \frac{1}{2}\lim\frac{\sin\frac{\pi-x}{4}}{\pi+x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2\pi} = 0.$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 4\sin(-x)}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 8\lim\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim\frac{\sin x}{x} =$

$= 8\cdot 1\cdot 1 = 8.$

6. Правило Лопіталя.

1) Розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right],\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема. Нехай в деякому околі X точки $x=a$ ф-ї $f(x)$ і $q(x)$ диференційовані всюди, крім, може бути, самої точки $x=a$, і нехай $q'(x)$ в x. Якщо ф-ї $f(x)$ і $q(x)$ є нескінченно великими при $x\to a$ і при цьому існує границя відношення їх похідних $\frac{f'(x)}{q'(x)}$ при $x\to a$, то існує також і границя відношення $\frac{f(x)}{q(x)}$, причому справедлива рівність $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{q'(x)}$

Правило Лопіталя можна застосувати і у випадку, $x \to \infty$. Якщо при обчисленні $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{q'(x)}$ одержимо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$,$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то можна до цього відношення знову застосувати правило Лопіталя.

2) Розкриття невизначеності $[0 \cdot \infty]$, $[\infty\ \infty]$.

Для обчислення $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot q(x)$, де $f(x)$ – нескінченно мала, а $q(x)$ – нескінченно велика $[0 \cdot \infty]$, необхідно перетворити добуток до вигляду $\frac{f(x)}{\frac{1}{q(x)}}$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, або до вигляду $\frac{q(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, і далі застосовувати правило Лопіталя.

Для розкриття невизначеності $[\infty\ \infty]$ необхідно перетворити різницю $f(x)$- $q(x)$ до вигляду $f(x)(1- \frac{q(x)}{f(x)})$, потім розкрити невизначеність $\frac{q(x)}{f(x)}$ типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} \frac{q(x)}{f(x)} \neq 1$, то $\lim\limits_{x\to a} (f(x)-q(x)) = \infty$, якщо ж $\lim\limits_{x\to a} \frac{q(x)}{f(x)}$, одержимо невизначеність $[\infty \cdot 0]$.

3) Розкриття невизначеностей типу $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$.

Логарифмуючи попередньо рівність $y = f(x)^{q(x)}$, одержимо рівність $\ln y = q(x) \ln f(x)$ і знаходимо границю $\ln y$, після чого знаходимо і границю y .

В усіх трьох випадках $\ln y$ є невизначеність типу $[0 \cdot \infty]$.

Знайти границю, використовуючи правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg\ 3x}{e^{5x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{1+9x^2}}{5e^{5x}} = \frac{3}{5}.$$

-$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ - від нескінченно великих функції перейти до нескінченно малих (винесемо за дужки степінь з найбільшим показником в чисельнику і знаменнику)

а) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5x^2+6x+1}{6x^2-4x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(6-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{5}{6};$$ оскільки $\frac{6}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{4}{x}$, $\frac{2}{x^2}$ - неск. малі і їх границі

дорівнюють нулеві. 5 і 6 – сталі величини

- $\left[\frac{0}{0}\right]$ – чисельник і знаменник многочлени . Розкласти на множники чисельник і знаменник, спростити, обчислити границю спрощеного виразу.

$$\lim_{n\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to 4}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{n\to 4}\frac{x-1}{x-2}=\frac{\lim_{n\to 4}(x-1)}{\lim_{n\to 4}(x-2)}=\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}$$

-$\left[\frac{0}{0}\right]$ - в чисельнику або знаменнику , чи і в чисельнику і в знаменнику квадратні корені (домножаємо на спряжений вираз)

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ б) $\lim_{n\to -\infty}\frac{4-5x+9x^3}{x^2+3x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to -\infty}\frac{x^3(\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x^2}+9)}{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})}=\lim_{n\to -\infty}\frac{x(\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x^2}+5)}{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}=$

$$=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2-7}{3x^4-x^3+x^2-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{7}{x^2}\right)}{x^4\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{7}{x^2}}{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\infty}=0$$

Звертаємо увагу, що $\frac{1}{\infty}=0$; $\frac{\infty}{1}=\infty$

$[\infty-\infty]$ а) $\lim_{n\to\infty}\left(x(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-2})\right)=[\infty-\infty]=$

домножимо і поділимо на спряжене

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^2+5-x^2+2)}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7x}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}=\frac{7}{2}$$

а)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$Домножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{6}\,.$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$Домножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника і до знаменника.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\frac{\pi-x}{4}}{(\pi-x)\,(\pi+x)} = \lim\frac{2\sin\frac{\pi-x}{4}\sin\frac{\pi-x}{4}}{4\left(\frac{\pi-x}{4}\right)(\pi+x)} = \frac{1}{2}\lim\frac{\sin\frac{\pi-x}{4}}{\pi+x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2\pi} = 0.$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 4\sin(-x)}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 8\lim\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim\frac{\sin x}{x} =$

= 8·1·1=8.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{\frac{2x}{5}} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1}{3x-2}-1\right)^{\frac{2x}{5}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1-3x+2}{3x-2}\right)^{\frac{2x}{5}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{\frac{2x}{5}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{3}\cdot\frac{3}{3x-2}\cdot\frac{2x}{5}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{4x}{15x-10}} = e^{\frac{6}{15}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

-$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2^{1+7x} = 2^{-\infty} = 0.$

<u>Перевір себе.</u>

1.Чисельник і знаменник многочлена, невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$

а) $\lim\limits_{n\to 3} \frac{n^2-4}{n^2-2n-2}$ (5)

б) $\lim\limits_{n\to 5} \frac{n^2-25}{n^2-6n+5}$ $\left(\frac{5}{2}\right)$

в) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$ (3)

г) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{6x^2-5x+1}{8x^3-1}$ $\left(\frac{1}{6}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$ (-1)

2. $\left[\frac{0}{0}\right]$, чисельник або знаменник , або і чисельник і знаменник містять корені.

а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{x+7}}{2-\sqrt{x+2}}$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

б) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ $\left(\frac{1}{40}\right)$

в) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-1}$ $\left(-\frac{1}{8}\right)$

г) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$ $\left(\frac{1}{48}\right)$

3.$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-3n^2+4}{7-x^3}$ (-5)

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4n^2-3n^6}{n^3-2n^2+1}$ (∞)

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n+7}{4n^3-9n-1}$ (0)

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3+3x^2-x-1}{5x^2-4x+5}$ (∞)

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^2-5x+1}{9x-14x^2}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)$

4. $[\infty - \infty]$

а) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2$-x$\sqrt{x^2-4}$) (2)

б) $\lim\limits_{x\to\infty}$(x($\sqrt{x^2+5}$ -$\sqrt{x^2}$ -1)) (2)

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}$ - $\sqrt{x^2}$ -3)

$\left[\frac{0}{0}\right]$

а) $\lim\limits_{X\to\infty} \frac{sin5x}{tg3x}$ $(\frac{5}{3})$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-cos6x}{xsin3x}\right)$ (6)

в) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(2(x-1))}{x^{2-7x+6}}$ $(-\frac{2}{5})$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin7x}{tg5x}$ $(\frac{7}{5})$

Дидактичка

I

1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2+x-20}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8x^3-64}{3x^6-6x^5}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{+3}+x-2}{x^3-x^2-x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-42}{x^2-5x+6}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-42}{x^{2-4}}$

II

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

2) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

3) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$

6) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$

7) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+122}}{x^2+8x+15}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

III

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2-5x+4}{2-4x+9x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3-3x^2+5}{7x^2-20}$

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x^2-5x+1}{2x^2-4}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{9-5x^3}{2x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{25x^2-16}{x^3-x^2+x-1}$

6) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})$

7) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3})$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{2x^2-1})$

1. Література: Практичні заняття з курсу вищої математики В.Б.Рудницький , І.І.Кантемир. Хмельницький 1999р.
2. Вища математика: В.Б.Рудницький , І.І.Лесюк , Г.І.Міхалевська. Хмельницький 2002р.
3. Вища математика: О.Н.Єрмакова Київ 2004р.
4. Вища математика для економістів: В.В.Барковський , Н.В.Барковська Київ 2005р.
5. Сборник задач по математике: М.І.Скановы Московская Высшая школа 1988г.